



· 粗糙集与形式概念分析中的约简研究 ·

## 形式背景的基与基数及其性质

张 琴<sup>1,2</sup>, 魏 玲<sup>1,2</sup>

1. 西北大学 数学学院, 陕西 西安 710127; 2. 西北大学 概念、认知与智能研究中心, 陕西 西安 710127

**摘要** 保持二元关系不变的概念约简是形式概念分析中的一个重要研究方向, 可在不丢失原始信息的前提下仅选择一部分概念进行知识发现。一个形式背景的不同概念约简中的概念个数可能不同, 其中概念个数最少的概念约简表明用最少的概念就能恢复原始背景的所有二元关系, 可极大地简化知识表示方式。首先, 给出形式背景的基与基数、最膨胀概念约简及最压缩概念约简的定义, 并研究它们的性质; 其次, 研究形式背景的基与对象概念集(属性概念集)的关系, 继而给出对象概念集(属性概念集)是基的等价刻画; 最后, 从形式背景的 Ferrers 维数与集合维数角度给出形式背景的基数范围。

**关键词** 形式概念分析; 形式背景; 概念约简; 基; 基数

中图分类号: O29; TP18 DOI: 10.16152/j.cnki.xdxbr.2026-01-013

## Bases and cardinality of formal contexts and their associated properties

ZHANG Qin<sup>1,2</sup>, WEI Ling<sup>1,2</sup>

1. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

2. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China

**Abstract** Concept reduction preserving binary relation is an important research direction in formal concept analysis, which allows for knowledge discovery by selecting some formal concepts (not all) without losing original information. The number of concepts in different concept reducts of a formal context may vary, where the concept reducts with the fewest number of formal concepts indicate that all binary relations can be recovered by the fewest formal concepts. This greatly simplifies the knowledge representation. We first define the bases and the cardinality of a formal context, the most expanded concept reducts and the most compressed concept reducts, and investigate their properties. Then, we explore the relationship between the bases of formal context and the set of object concepts (the set of attribute concepts), and provide an equivalent condition for when the set of object concepts (the set of attribute concepts) serves as a basis. Finally, we present the range of the cardinality of a formal context from the perspectives of the set dimension and the Ferrers dimension of a formal context.

**Keywords** formal concept analysis; formal context; concept reduct; basis; cardinality

收稿日期: 2025-07-01 修回日期: 2025-08-07

基金项目: 国家自然科学基金(12171392); 陕西数理基础科学研究项目(23JSZ008)。

第一作者: 张琴, 女, 博士研究生, 从事形式概念分析等研究, xzzonly1@163.com。

通信作者: 魏玲, 女, 教授, 博士生导师, 从事形式概念分析、粒计算、三支决策理论等研究, wl@nwu.edu.cn。

德国数学家 Wille 于 1982 年提出形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)<sup>[1]</sup>, 并与 Ganter 进行了更为深入的研究<sup>[2]</sup>。作为数据分析和知识发现的有力工具, FCA 已广泛应用于信息检索、知识发现、机器学习等领域<sup>[3-9]</sup>。

约简理论是形式概念分析中的重要研究议题。FCA 中关于可约属性的分析最早由 Ganter 和 Wille 提出<sup>[2]</sup>。随后张文修和魏玲等于 2005 年提出了属性约简理论<sup>[10]</sup>, 其本质是用极小的属性子集保持概念格结构不变<sup>[11]</sup>。之后, 有学者陆续提出保持粒概念<sup>[12]</sup>, 交、并不可约元<sup>[13-14]</sup>不变的属性约简。属性约简还被推广至多种不同背景和意义下研究, 例如, 模糊形式背景<sup>[15-16]</sup>和三支概念分析<sup>[17]</sup>下的属性约简。

属性约简在保持原始概念格结构或其他主要特征不变的前提下删除冗余属性, 但此过程必然会丢失原始背景的部分信息。为避免原始信息的损失, 魏玲等借鉴用 FCA 解决布尔因子分析问题的思想<sup>[18-20]</sup>, 提出保持二元关系不变的概念约简<sup>[21-22]</sup>。概念约简在不损失形式背景中原始信息的前提下减少概念数量、简化知识表示方式, 从而降低使用 FCA 解决问题的复杂性。随后, 许多学者就求解概念约简的方法进行研究, 例如: 谢小贤等基于布尔矩阵运算研究了概念特征和概念约简<sup>[23]</sup>; 王霞等提出一种基于概念可辨识矩阵的保持二元关系不变的概念约简方法<sup>[24]</sup>; 马文胜等利用同效关系给出求解概念约简的新方法<sup>[25]</sup>; Zhao 等给出代表概念矩阵的定义, 并利用其给出一种直观的求解所有概念约简的方法<sup>[26]</sup>。基于不同形式背景的概念约简呈现不同语义这一事实, 魏玲等定义了对称形式背景, 并证明对称概念集是一个概念约简<sup>[27]</sup>; 对于不完备形式背景, 朱朵朵等给出了三类 SE-ISI 概念约简的获取方法<sup>[28]</sup>; 在弱协调决策形式背景上, 李炎等研究了保持规则前件信息概念约简问题<sup>[29]</sup>。

概念约简的核心思想是在保持原始背景的所有二元关系不变的前提下寻找极小的概念子集。而一个形式背景的不同概念约简中的概念个数可能不同, 其中概念个数最少的概念约简(本文称为形式背景的基)表明利用最少的概念就能还原形式背景的所有二元关系, 可极大地简化知识表示方式。事实上, 形式背景的基相当于形式背景中二元关系的最优矩形覆盖, 它可以高效地解决与信息检索、数据挖掘、文本特征提取等相关的问

题<sup>[6-9]</sup>。因此形式背景的基在概念约简中占据重要的地位, 有必要对其展开研究。另外, Ganter 和 Wille 给出形式背景的 Ferrers 维数和集合维数本质上是能覆盖原始背景所有二元关系的一些特殊二元关系的最小个数<sup>[2]</sup>, 因此, 它们与形式背景的基中的概念个数有着密切的联系。

本文首先定义形式背景的基与基数并讨论它们的性质; 其次, 研究形式背景的基与对象概念集、属性概念集的关系; 最后, 探讨形式背景的基数与形式背景维数的关系。

## 1 预备知识

**定义 1<sup>[1]</sup>** 称三元组  $K = (G, M, I)$  为形式背景, 其中  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$  为对象集,  $g_i (i \leq p)$  称为对象;  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$  为属性集,  $m_j (j \leq q)$  称为属性;  $I \subseteq G \times M$  为  $G$  与  $M$  之间的二元关系。对于任意的  $g \in G$  及  $m \in M$ , 若  $(g, m) \in I$ , 称对象  $g$  具有属性  $m$ , 记为  $gIm$ 。

形式背景  $K = (G, M, I)$  的补背景定义为  $K^c = (G, M, I^c) = (G, M, G \times M \setminus I)$ 。

对于任意的对象子集  $X \subseteq G$ , 属性子集  $Y \subseteq M$ , Wille 定义了一对导出算子<sup>[1]</sup>:

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, gIm\}, \quad (1)$$

$$Y^* = \{g \in G \mid \forall m \in Y, gIm\}. \quad (2)$$

导出算子的相关性见文献[2]。特别地, 对于任意的对象  $g \in G$ , 属性  $m \in M$ , 记  $\{g\}^*$  为  $g^*$ ,  $\{m\}^*$  为  $m^*$ 。

设  $(G, M, I)$  为形式背景, 对于任意的  $g \in G$ , 有  $g^* \neq \emptyset$  且  $g^* \neq M$ , 对于任意的  $m \in M$ , 有  $m^* \neq \emptyset$  且  $m^* \neq G$ , 则称形式背景是正则的。对于任意的  $g, h \in G, m, n \in M$ , 若  $g^* = h^*$  时有  $g = h$  且  $m^* = n^*$  时有  $m = n$ , 则称形式背景是净化的。本文讨论的形式背景都是正则且净化的。

若一个二元对  $(X, Y)$  ( $X \subseteq G, Y \subseteq M$ ) 满足  $X^* = Y$  且  $Y^* = X$ , 则称  $(X, Y)$  是一个形式概念, 简称概念。其中  $X$  称为概念的外延,  $Y$  称为概念的内涵。事实上, 通过对形式背景的行、列进行适当的交换和调整, 可使每个概念的外延和内涵形成一个矩形交叉块<sup>[2]</sup>, 因此本文亦称概念为极大矩形块。

在  $K = (G, M, I)$  中, 对于任意的对象  $g \in G$ , 属性  $m \in M$ ,  $(g^{**}, g^*)$  和  $(m^*, m^{**})$  分别称为对象概念和属性概念。记形式背景  $K$  中概念的全

体为  $L(K)$ , 对象概念的全体为  $O(L(K))$ , 属性概念的全体为  $A(L(K))$ 。

对于任意的  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in L(K)$ , 定义偏序关系

$$(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (Y_1 \supseteq Y_2),$$

则  $L(K)$  形成一个完备格, 称为概念格。其中上、下确界分别为

$$\bigvee_{i \in T} (X_i, Y_i) = ((\bigcup_{i \in T} X_i)^{**}, \bigcap_{i \in T} Y_i),$$

$$\bigwedge_{i \in T} (X_i, Y_i) = (\bigcap_{i \in T} X_i, (\bigcup_{i \in T} Y_i)^{**}),$$

式中,  $T$  为指标集。

**例 1** 表 1 是一个形式背景  $K_1 = (G_1, M_1, I_1)$ , 其中, 对象集  $G_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ , 属性集  $M_1 = \{a, b, c, d\}$ 。如果某对象具有某属性, 则在该对象行与该属性列的交叉处用  $\times$  标记, 否则不标记。形式背景  $K_1$  对应的概念格  $L(K_1)$  如图 1 所示, 其中,  $c_i (i = 1, \cdots, 10)$  表示相应概念编号。该形式背景的对象概念的全体和属性概念的全体分别为  $O(L(K_1)) = \{c_5, c_7, c_8, c_9\}, A(L(K_1)) = \{c_2, c_3, c_4, c_6\}$ 。

表 1 形式背景  $K_1$   
Tab. 1 A formal context  $K_1$

| $G_1$ | $a$      | $b$      | $c$      | $d$      |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 1     | $\times$ |          | $\times$ |          |
| 2     | $\times$ | $\times$ |          | $\times$ |
| 3     | $\times$ | $\times$ |          |          |
| 4     |          | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

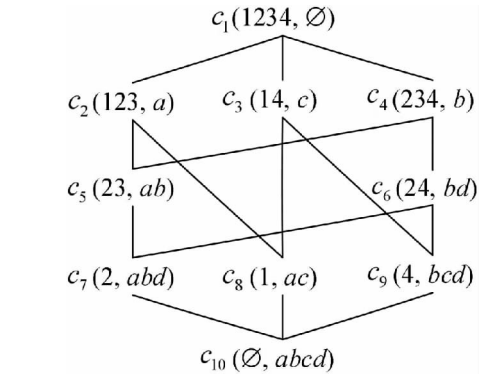


图 1 概念格  $L(K_1)$

Fig. 1 A concept lattice  $L(K_1)$

## 2 形式背景的基的定义及其性质

魏玲和曹丽等提出的概念约简是指保持形式背景二元关系不变的极小概念集<sup>[21-22]</sup>。本节在回顾概念约简基本定义的基础上, 研究概念个数最少的概念约简及其性质。

**定义 2**<sup>[21-22]</sup> 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,  $L(K)$  为其概念格,  $\mathcal{F} \subseteq L(K)$ 。若  $I = \bigcup_{(X, Y) \in \mathcal{F}} X \times Y$ , 则称  $\mathcal{F}$  为保持二元关系不变的概念协调集, 简称概念协调集; 若对于任意的  $(W, Z) \in \mathcal{F}$ , 有  $I \neq \bigcup_{(X, Y) \in \mathcal{F} \setminus \{(W, Z)\}} X \times Y$ , 则称  $\mathcal{F}$  为保持二元关系不变的概念约简, 简称概念约简。

记形式背景  $K$  的所有概念约简的集合为  $\mathcal{R}(K)$ 。

**引理 1**<sup>[21-22]</sup> 对象概念的全体  $O(L(K))$  与属性概念的全体  $A(L(K))$  均为概念协调集。

**例 2** (续例 1) 根据定义 2, 表 1 的概念约简共 9 个, 分别为:  $\{c_5, c_6, c_8, c_9\}, \{c_5, c_7, c_8, c_9\}, \{c_2, c_3, c_4, c_6\}, \{c_3, c_5, c_6, c_8\}, \{c_2, c_3, c_5, c_6\}, \{c_2, c_3, c_4, c_7, c_9\}, \{c_2, c_3, c_5, c_7, c_9\}, \{c_2, c_4, c_6, c_8, c_9\}, \{c_2, c_4, c_7, c_8, c_9\}$ 。

由例 2 可知, 对于一个形式背景, 其不同概念约简中概念的个数可能不同。本文把概念个数最少的概念约简称为形式背景的基。

为方便起见, 本文用  $| \cdot |$  表示集合的势。

**定义 3** 设  $K$  为形式背景,  $\mathcal{F}_B \in \mathcal{R}(K)$ 。若  $| \mathcal{F}_B | = \min \{ | \mathcal{F} | \mid \mathcal{F} \in \mathcal{R}(K) \}$ , 则称  $\mathcal{F}_B$  为  $K$  的一个基; 进一步, 称  $| \mathcal{F}_B |$  为  $K$  的基数, 记为  $\text{Card}(K)$ 。

由于形式背景的概念约简必存在<sup>[22]</sup>, 结合定义 3, 有以下结果。

**定理 1** 形式背景的基必存在。

根据引理 1 和定义 3, 得到以下性质。

**性质 1** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景, 则  $\text{Card}(K) \leq \min(|G|, |M|)$ 。

**证明** 由于  $K = (G, M, I)$  是净化背景, 所以  $|O(L(K))| = |G|$  且  $|A(L(K))| = |M|$ 。由引理 1 和定义 3 知  $\text{Card}(K) \leq \min(|O(L(K))|, |A(L(K))|)$ , 因此  $\text{Card}(K) \leq \min(|G|, |M|)$ 。

性质 1 表明形式背景的基数比其对对象集的势和属性集的势都小。

**例 3** (续例 2) 表 1 所示的形式背景  $K_1$  的基

为  $\{c_5, c_6, c_8, c_9\}, \{c_5, c_7, c_8, c_9\}, \{c_2, c_3, c_4, c_6\}, \{c_3, c_5, c_6, c_8\}, \{c_2, c_3, c_5, c_6\}$ 。  $K_1$  的基数为  $\text{Card}(K_1) = 4$ 。

从例 3 可以看出,形式背景的基并不唯一。记形式背景  $K$  的所有基的集合为  $\mathcal{B}(K)$ 。称不是基的概念约简为一般概念约简,记所有一般概念约简的集合为  $\mathcal{U}(K)$ 。

为方便后文研究形式背景的基与对象概念集、属性概念集之间的关系,下面在形式背景的基的基础上定义最膨胀概念约简与最压缩概念约简。

设  $\mathcal{F} \subseteq L(K), \text{INT}(\mathcal{F}) = \{Y \mid (X, Y) \in \mathcal{F}\}$  表示  $\mathcal{F}$  中所有概念的内涵构成的集合。

**定义 4** 设  $K$  为形式背景,  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(K)$ 。若 
$$\sum_{Y \in \text{INT}(\mathcal{F})} |Y| = \max \left\{ \sum_{Y_B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} |Y_B| \mid \mathcal{F}_B \in \mathcal{B}(K) \right\},$$
 则称  $\mathcal{F}$  为最膨胀概念约简;若 
$$\sum_{Y \in \text{INT}(\mathcal{F})} |Y| = \min \left\{ \sum_{Y_B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} |Y_B| \mid \mathcal{F}_B \in \mathcal{B}(K) \right\},$$
 则称  $\mathcal{F}$  为最压缩概念约简。

事实上:最膨胀概念约简就是形式背景的基中概念内涵的势之和最大的概念约简;最压缩概念约简就是形式背景的基中概念内涵的势之和最小的概念约简。

**推论 1** 形式背景的最膨胀概念约简和最压缩概念约简必存在。

实际上,我们可以发现最压缩概念约简、形式背景的基、最膨胀概念约简中各自概念的内涵构成的集合之间具有逐项包含的关系。

**定义 5**<sup>[11]</sup> 设  $H, L$  是集族且  $|H| = |L|$ 。若对于任意的  $H_1, H_2 \in H$  且  $H_1 \neq H_2$ , 存在  $L_1, L_2 \in L$  且  $L_1 \neq L_2$  使得  $H_1 \subseteq L_1$  且  $H_2 \subseteq L_2$ , 则称  $H$  逐项包含于  $L$ , 记为  $H \ll L$ 。

**性质 2** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,  $\mathcal{F}_B \in \mathcal{B}(K)$ ,  $\mathcal{F}_E$  为  $K$  的最膨胀概念约简,  $\mathcal{F}_C$  为  $K$  的最压缩概念约简, 则  $\text{INT}(\mathcal{F}_C) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_B) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_E)$ 。

**证明** 先证  $\text{INT}(\mathcal{F}_C) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_B)$ 。首先,由定义 4 可知  $|\text{INT}(\mathcal{F}_C)| = |\text{INT}(\mathcal{F}_B)|$ ; 其次,假设  $\text{INT}(\mathcal{F}_C) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_B)$  不成立, 则存在  $C_1, C_2 \in \text{INT}(\mathcal{F}_C) (C_1 \neq C_2)$ , 对于任意的  $B_i, B_j \in \text{INT}(\mathcal{F}_B) (B_i \neq B_j)$ , 有  $C_1 \not\subseteq B_i$  或  $C_2 \not\subseteq B_j$ 。以下分两种情形证明。

情形 1,  $C_1 \not\subseteq B_i$  且  $C_2 \not\subseteq B_j$ , 从而对于任意的  $B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)$ , 有  $C_1 \not\subseteq B$  且  $C_2 \not\subseteq B$ 。情形 ①, 在

$\text{INT}(\mathcal{F}_B)$  中存在某些元  $B_s, B_t (s \in S, t \in T, S, T$  为指标集) 满足  $C_1 = \bigcup_{s \in S} B_s$  且  $C_2 = \bigcup_{t \in T} B_t$ 。则对任意的  $(g, m) \in C_1^* \times C_1 \cup C_2^* \times C_2$ , 有  $(g, m) \in (\bigcup_{s \in S} B_s^* \times B_s) \cup (\bigcup_{t \in T} B_t^* \times B_t)$ 。又由于  $\text{INT}(\mathcal{F}_C) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_B)$  不成立, 则此时必存在  $(g_0, m_0) \in \bigcup_{C_i \in \text{INT}(\mathcal{F}_C) \setminus \{C_1, C_2\}} C_i^* \times C_i \subseteq I$ , 但  $(g_0, m_0) \notin B^* \times B$ , 从而  $(g_0, m_0) \notin \bigcup_{B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} B^* \times B$ , 与  $\mathcal{F}_B \in \mathcal{B}(K)$  矛盾。情形 ②, 在  $C_1, C_2$  中至少存在一个元(不妨设为  $C_1$ ) 满足  $C_1$  不等于  $\text{INT}(\mathcal{F}_B)$  中任意一些元的并, 则必然存在  $(g_0, m_0) \in C_1^* \times C_1 \subseteq I$  但  $(g_0, m_0) \notin B^* \times B$ , 从而  $(g_0, m_0) \notin \bigcup_{B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} B^* \times B$ , 与  $\mathcal{F}_B \in \mathcal{B}(K)$  矛盾。

情形 2,  $C_1 \not\subseteq B_i$  且  $C_2 \subseteq B_j$ , 从而对于任意的  $B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)$ , 有  $C_1 \not\subseteq B$  且  $C_2 \subseteq B$ 。则  $C_2 \subseteq \bigcap_{B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} B = \bigcap_{B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} B^{**} = (\bigcup_{B \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} B^*)^* = G^* = \emptyset$ , 即  $C_2 = \emptyset$ , 与  $C_2 \in \text{INT}(\mathcal{F}_C)$  矛盾。 $C_1 \subseteq B_i$  且  $C_2 \not\subseteq B_j$  时类似可证。

综上, 有  $\text{INT}(\mathcal{F}_C) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_B)$ 。类似可证  $\text{INT}(\mathcal{F}_B) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_E)$ 。

由性质 2, 可得如下唯一性定理。

**定理 2** 形式背景的最膨胀概念约简与最压缩概念约简必唯一。

**证明** 假设  $\mathcal{F}_{E_1}$  和  $\mathcal{F}_{E_2}$  都是形式背景  $K$  的最膨胀概念约简, 由性质 2 知  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2})$  且  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_2}) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_{E_1})$ , 此时我们断言  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) = \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2})$ 。事实上, 设  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}, \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2}) = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ , 由  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2})$ , 不妨假设  $Y_i \subseteq Z_i (1 \leq i \leq n)$ 。又由  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_2}) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_{E_1})$ , 则对于任意的  $Z_s \in \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2}) (1 \leq s \leq n)$ , 存在  $Y_t \in \text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) (1 \leq t \leq n)$ , 使得  $Z_s \subseteq Y_t$ , 从而  $Z_s \subseteq Y_t \subseteq Z_t$ 。对于  $Z_t \in \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2})$ , 则存在  $Y_l \in \text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) (1 \leq l \leq n)$ , 使得  $Z_t \subseteq Y_l$ , 从而  $Z_s \subseteq Y_t \subseteq Z_t \subseteq Y_l \subseteq Z_l$ 。重复上述步骤, 一定能找到  $Y_s \in \text{INT}(\mathcal{F}_{E_1})$ , 使得  $Z_s \subseteq Y_t \subseteq Z_t \subseteq Y_l \subseteq Z_l \subseteq Y_s$ 。于是  $Z_s \subseteq Y_t \subseteq Z_t \subseteq Y_l \subseteq Z_l \subseteq Y_s \subseteq Z_s$ , 故  $Z_s = Y_s$ 。由  $Z_s$  的任意性, 有  $\text{INT}(\mathcal{F}_{E_1}) = \text{INT}(\mathcal{F}_{E_2})$ , 因此  $\mathcal{F}_{E_1} = \mathcal{F}_{E_2}$ 。故形式背景的最膨胀概念约简唯一。类似可证最压缩概念约简的唯一性。

记形式背景  $K$  的最膨胀概念约简与最压缩概念约简分别为  $E(K)$  和  $C(K)$ 。

**例 4** (续例 3)  $K_1$  的最膨胀概念约简和最压

缩概念约简分别为  $E(K_1) = \{c_5, c_7, c_8, c_9\}$  和  $C(K_1) = \{c_2, c_3, c_4, c_6\}$ 。则  $\text{INT}(E(K_1)) = \{ac, ab, bcd, abd\}$  且  $\text{INT}(C(K_1)) = \{a, b, c, bd\}$ 。

取  $K_1$  的一个基  $\mathcal{F}_B = \{c_3, c_5, c_6, c_8\}$ , 则  $\text{INT}(\mathcal{F}_B) = \{ac, ab, c, bd\}$ 。故  $\text{INT}(C(K_1)) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_B) \ll \text{INT}(E(K_1))$ 。

此外,根据基、最膨胀概念约简及最压缩概念约简的定义可得到以下性质。

**性质3** 设  $K$  为形式背景,则  $E(K), C(K) \in \mathcal{B}(K)$  且  $\mathcal{B}(K) \subseteq \mathcal{R}(K)$ 。

**性质4** 设  $K$  为形式背景,  $\mathcal{F}_U \in \mathcal{U}(K)$ , 则  $\text{Card}(K) = |E(K)| = |C(K)| \leq |\mathcal{F}_U|$ 。

**性质5** 设  $K$  为形式背景,  $\mathcal{F}_B \in \mathcal{B}(K)$ , 则 
$$\sum_{C_i \in \text{INT}(C(K))} |C_i| \leq \sum_{B_i \in \text{INT}(\mathcal{F}_B)} |B_i| \leq \sum_{E_i \in \text{INT}(E(K))} |E_i|。$$

### 3 形式背景的基与对象(属性)概念集的关系

本节研究形式背景的基与对象(属性)概念集的关系。

**引理2** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,  $L(K)$  为其概念格。对于任意的  $(X, Y) \in L(K) (X, Y \neq \emptyset)$ , 存在  $g \in G, m \in M$ , 使得  $m^{**} \subseteq Y \subseteq g^*$ 。

**证明** 设  $(X, Y) \in L(K) (X, Y \neq \emptyset)$ , 则对于任意的  $g \in X$ , 有  $Y = X^* \subseteq g^*$ , 且对于任意的  $m \in Y$ , 有  $m^{**} \subseteq Y^{**} = Y$ 。

引理2表明对于任意一个概念,都能找到一个对象概念,使得该概念的内涵包含于该对象概念的内涵;同时也能找到一个属性概念,使得该概念的内涵包含该属性概念的内涵。

下面给出最膨胀概念约简(最压缩概念约简)与对象概念集(属性概念集)之间的关系。

**定理3** 设  $K$  为形式背景,  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(K)$ 。若  $\mathcal{F} \subseteq O(L(K))$ , 则  $\mathcal{F} = E(K)$ ; 若  $\mathcal{F} \subseteq A(L(K))$ , 则  $\mathcal{F} = C(K)$ 。

**证明** 假设  $\mathcal{F} \neq E(K)$ , 则由性质2可知, 存在  $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{B}(K)$  使得  $\text{INT}(\mathcal{F}) \ll \text{INT}(\mathcal{F}_0)$ 。从而对于任意的  $g^* \in \text{INT}(\mathcal{F})$ , 都存在  $Y_0 \in \text{INT}(\mathcal{F}_0)$  使得  $g^* \subseteq Y_0$ , 与引理2矛盾。因此, 若  $\mathcal{F} \subseteq O(L(K))$ , 则  $\mathcal{F} = E(K)$ 。类似可证若  $\mathcal{F} \subseteq A(L(K))$ , 则  $\mathcal{F} = C(K)$ 。

定理3表明形式背景的基中的元素如果都是对象概念,则它一定是最膨胀概念约简;如果都是

属性概念,则它一定是最压缩概念约简。

**注1** 定理3的逆命题不一定成立,即:最膨胀概念约简不一定包含于对象概念集;最压缩概念约简不一定包含于属性概念集。

**例5** 表2是一个形式背景  $K_2 = (G_2, M_2, I_2)$ , 其中对象集  $G_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 属性集  $M_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ 。图2为相应的概念格  $L(K_2)$ , 其中,  $d_i (i = 1, \dots, 12)$  表示相应概念编号。该形式背景的对象概念的全体和属性概念的全体分别为  $O(L(K_2)) = \{d_5, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}\}$ ,  $A(L(K_2)) = \{d_2, d_3, d_4, d_5, d_7, d_8\}$ 。

该形式背景的概念约简共6个,分别为:  $\{d_5, d_6, d_7, d_8\}$ ,  $\{d_2, d_3, d_4, d_5, d_7, d_8\}$ ,  $\{d_5, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}\}$ ,  $\{d_3, d_4, d_5, d_7, d_8, d_{10}, d_{11}\}$ ,  $\{d_2, d_4, d_5, d_7, d_8, d_9, d_{11}\}$ ,  $\{d_2, d_3, d_5, d_7, d_8, d_9, d_{10}\}$ 。由定义4知  $E(K_2) = \{d_5, d_6, d_7, d_8\}$ , 但  $\{d_5, d_6, d_7, d_8\} \not\subseteq O(L(K_2))$ ; 类似地,  $C(K_2) = \{d_5, d_6, d_7, d_8\}$ , 但  $\{d_5, d_6, d_7, d_8\} \not\subseteq A(L(K_2))$ 。

表2 形式背景  $K_2$   
Tab. 2 A formal context  $K_2$

| $G_2$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1     | ×   | ×   | ×   | ×   |     |     |
| 2     | ×   | ×   | ×   |     | ×   |     |
| 3     | ×   | ×   | ×   |     |     | ×   |
| 4     | ×   |     |     | ×   |     |     |
| 5     |     | ×   |     |     | ×   |     |
| 6     |     |     | ×   |     |     | ×   |

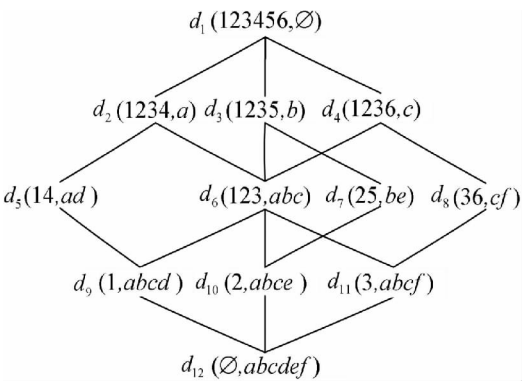


图2 概念格  $L(K_2)$

Fig. 2 A concept lattice  $L(K_2)$

事实上,即使对象概念集(属性概念集)是概念约简,它也不一定是形式背景的基。比如,在

例 5 中,  $O(L(K_2)) = \{d_5, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}\}$  和  $A(L(K_2)) = \{d_2, d_3, d_4, d_5, d_7, d_8\}$  是  $K_2$  的概念约简,但它们不是  $K_2$  的基。为此,我们探讨对象概念集(属性概念集)是形式背景的基的等价刻画。

**定理 4** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,  $\text{Card}(K)$  为  $K$  的基数,  $\mathcal{B}(K)$  为  $K$  的所有基构成的集合。则下列命题等价:

- 1)  $O(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ ;
- 2)  $\text{Card}(K) = |G|$ ;
- 3)  $O(L(K)) = E(K)$ 。

**证明** 1) $\Rightarrow$ 2)。已知  $O(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ , 则由定义 3 知  $\text{Card}(K) = |O(L(K))|$ 。又因为  $K$  是净化背景, 故  $|O(L(K))| = |G|$ , 从而  $\text{Card}(K) = |G|$ 。

2) $\Rightarrow$ 1)。已知  $\text{Card}(K) = |G|$ , 则  $|O(L(K))| = |G| = \text{Card}(K)$ , 并结合引理 1 知,  $O(L(K))$  是势最小的概念协调集。因此  $O(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ 。

1) $\Leftrightarrow$ 3)。由定义 4 和定理 3 可得。

定理 4 表明若形式背景的基数为对象集的势, 则对象概念集为形式背景的基, 反之亦然。

**定理 5** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,  $\text{Card}(K)$  为  $K$  的基数,  $\mathcal{B}(K)$  为  $K$  的所有基构成的集合, 则下列命题等价:

- 1)  $A(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ ;
- 2)  $\text{Card}(K) = |M|$ ;
- 3)  $A(L(K)) = C(K)$ 。

定理 5 表明若形式背景的基数为属性集的势, 则属性概念集为形式背景的基, 反之亦然。

**例 6** 表 3 是一个形式背景  $K_3 = (G_3, M_3, I_3)$ , 其中对象集  $G_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ , 属性集  $M_3 = \{a, b, c, d, e, f\}$ 。图 3 为相应的概念格  $L(K_3)$ , 其中,  $e_i (i = 1, \dots, 9)$  表示相应概念编号。

表 3 形式背景  $K_3$   
Tab. 3 A formal context  $K_3$

| $G_3$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1     | ×   | ×   | ×   | ×   |     |     |
| 2     | ×   | ×   |     |     | ×   |     |
| 3     |     | ×   |     | ×   |     | ×   |
| 4     |     |     |     |     |     | ×   |

该形式背景的概念约简为  $\{e_2, e_4, e_7, e_8\}$  和

$\{e_2, e_6, e_7, e_8\}$ , 于是  $\text{Card}(K_3) = 4 = |G_3|$ , 故由定理 4 知  $O(L(K_3)) = \{e_2, e_6, e_7, e_8\} \in \mathcal{B}(K_3)$ 。同时  $\text{Card}(K_3) = 4 < |M_3| = 6$ , 此时不满足定理 5 命题 1), 因此  $A(L(K_3)) = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8\} \notin \mathcal{B}(K_3)$ 。

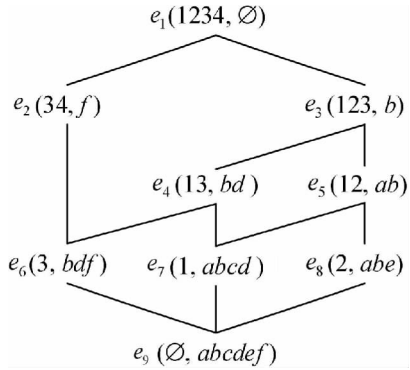


图 3 概念格  $L(K_3)$   
Fig. 3 A concept lattice  $L(K_3)$

结合定理 4 和定理 5, 可得如下结论。

**推论 2** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,  $L(K)$  为其概念格。若  $O(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ , 则不存在势比  $|G|$  小的概念约简; 若  $A(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ , 则不存在势比  $|M|$  小的概念约简。

**推论 3** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景, 则下列命题等价:

- 1)  $\text{Card}(K) = |G| = |M|$ ;
- 2)  $O(L(K)) \in \mathcal{B}(K), A(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ ;
- 3)  $O(L(K)) = E(K), A(L(K)) = C(K)$ 。

推论 3 表明形式背景的基数、对象集的势与属性集的势三者相等时, 对象概念集和属性概念集都是该形式背景的基, 反之亦然。例如, 在表 1 中,  $\text{Card}(K_1) = |G_1| = |M_1| = 4$ , 故  $O(L(K_1)) = \{c_5, c_7, c_8, c_9\} \in \mathcal{B}(K_1)$  且  $A(L(K_1)) = \{c_2, c_3, c_4, c_6\} \in \mathcal{B}(K_1)$ 。

结合性质 1、定理 4 及定理 5 可得如下结论。

**推论 4** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景, 则下列命题等价:

- 1)  $\text{Card}(K) < \min(|G|, |M|)$ ;
- 2)  $O(L(K)) \notin \mathcal{B}(K), A(L(K)) \notin \mathcal{B}(K)$ ;
- 3)  $O(L(K)) \neq E(K), A(L(K)) \neq C(K)$ 。

推论 4 表明当形式背景的基数比  $\min(|G|, |M|)$  小时, 对象概念集与属性概念集都不是形式背景的基, 反之亦然。这一点可由例 5 解释。

根据以上研究, 形式背景的基与对象概念集、属性概念集的关系分别如图 4 和图 5 所示。

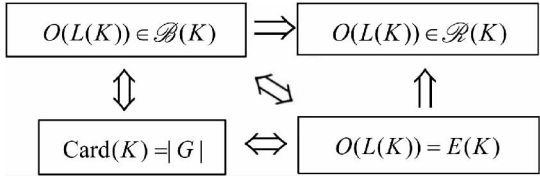


图 4 形式背景的基与对象概念集的关系

Fig. 4 The relationship between the bases of the formal context and the set of object concepts

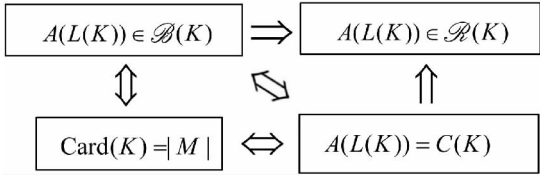


图 5 形式背景的基与属性概念集的关系

Fig. 5 The relationship between the bases of the formal context and the set of attribute concepts

## 4 形式背景的基数与形式背景维数的关系

形式背景的维数的确定与射影几何中的块问题及组合优化中的集合打包问题、集合覆盖问题相关<sup>[2,30]</sup>。本节考察形式背景的基数与形式背景的维数的关系。首先回顾形式背景维数的相关定义。

**定义 6**<sup>[2]</sup> 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,若二元关系  $F \subseteq G \times M$  满足  $(g, m) \in F, (h, n) \in F, (g, n) \notin F \Rightarrow (h, m) \in F$ , 则称  $F$  为 Ferrers 关系。进一步,称使得  $I = \bigcap_{i \in T} F_i (F_i \subseteq G \times M, t \in T)$  成立的 Ferrers 关系  $F_i$  的最小个数为形式背景  $K$  的 Ferrers 维数,记为  $\text{fdim}(K)$ 。

$\text{fdim}(K)$  也可在  $K^\circ = (G, M, I^\circ)$  上刻画,即  $\text{fdim}(K)$  等于使得  $I^\circ = \bigcup_{i \in T} F_i$  成立的 Ferrers 关系  $F_i$  的最小个数<sup>[2]</sup>。

**注 2** 如果把形式背景  $(G, M, F)$  表示为一个交叉表,则  $F$  是一个 Ferrers 关系当且仅当  $(G, M, F)$  通过调整行列可以变成阶梯形<sup>[2]</sup>。

若  $|\{ \{ m \in M \mid (g, m) \in F \} \mid g \in G \}| = k$ , 则称 Ferrers 关系  $F$  是  $k$  阶的。此外,称使得  $I^\circ = \bigcup_{i \in T} F_i$  成立的至多  $k-1$  阶 Ferrers 关系  $F_i$  的最小个数为形式背景  $K$  的  $k$ -维数,记为  $\text{fdim}_k(K)$ 。

除此之外,Ganter 和 Wille<sup>[2]</sup> 还给出偏序集的  $k$ -维数的概念:若偏序集  $(P, \leq)$  可嵌入长度为  $k-1$  的链的直积,则这些链的最小个数为  $(P, \leq)$  的  $k$ -维数,记为  $\text{dim}_k(P, \leq)$ 。概念格  $L(K)$

的  $k$ -维数与形式背景  $K$  的  $k$ -维数相等,即  $\text{dim}_k L(K) = \text{fdim}_k(K)$  (3)

**例 7** (续例 6) 在  $G_3 \times M_3$  中取一个二元关系  $F = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (3, b) \}$ , 则形式背景  $(G_3, M_3, F)$  如表 4 所示。通过交换表 4 中  $a, b$  所在的列,可以调整成表 5 所示的阶梯形,因此  $F$  是一个 Ferrers 关系。因为  $k = |\{ abc, ab, b \}| = 3$ ,故  $F$  是一个 3 阶 Ferrers 关系。

表 4 形式背景  $(G_3, M_3, F)$

Tab. 4 A formal context  $(G_3, M_3, F)$

| $G_3$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1     | ×   | ×   | ×   |     |     |     |
| 2     | ×   | ×   |     |     |     |     |
| 3     |     | ×   |     |     |     |     |
| 4     |     |     |     |     |     |     |

表 5 阶梯形式背景  $(G_3, M_3, F)$

Tab. 5 A stair-shaped formal context  $(G_3, M_3, F)$

| $G_3$ | $b$ | $a$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1     | ×   | ×   | ×   |     |     |     |
| 2     | ×   | ×   |     |     |     |     |
| 3     | ×   |     |     |     |     |     |
| 4     |     |     |     |     |     |     |

由于至少需 3 个 Ferrers 关系做并为  $I_3$ ,因此  $\text{fdim}(K_3^\circ) = 3$ 。其中这 3 个 Ferrers 关系可以为  $F_1 = \{ (2, e) \}, F_2 = \{ (3, d), (3, f), (4, f) \}, F_3 = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (3, b) \}$ 。

进一步,由于至少需 4 个 1 阶 Ferrers 关系做并为  $I_3$ ,因此  $\text{fdim}_2(K_3^\circ) = 4$ 。其中这 4 个 1 阶 Ferrers 关系可以为  $\bar{F}_1 = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (1, d) \}, \bar{F}_2 = \{ (2, a), (2, b), (2, e) \}, \bar{F}_3 = \{ (3, b), (3, d), (3, f) \}, \bar{F}_4 = \{ (3, f), (4, f) \}$ 。

设  $(G, M, I)$  为形式背景,  $\alpha: G \rightarrow \mathcal{A}(T), \beta: M \rightarrow \mathcal{A}(T)$  ( $\mathcal{A}(T)$  表示集合  $T$  的幂集) 为一对映射。如果它们满足  $gIm \Leftrightarrow \alpha g \cap \beta m \neq \emptyset$ , 则称其为集合  $T$  上的一个集合表示; 如果它们满足  $gIm \Leftrightarrow \alpha g \cap \beta m = \emptyset$ , 则称这对映射为集合  $T$  上的一个补集表示<sup>[2]</sup>。

**引理 3**<sup>[2]</sup> 设  $K$  为形式背景,  $L(K)$  为其概念格。则  $K$  在  $T$  上有补集表示当且仅当  $\text{dim}_2 L(K) \leq |T|$ 。

**定义 7<sup>[2]</sup>** 设  $K$  为形式背景,若  $K$  在集合  $T$  上有集合表示,则称  $T$  的最小势为  $K$  的集合维数,记为  $\dim(K)$ 。

事实上,形式背景的集合维数与其补背景的 2 - 维数相等<sup>[2]</sup>,即

$$\dim(K) = \text{fdim}_2(K^c). \tag{4}$$

形式背景的基数与形式背景的集合维数之间的关系如下。

**定理 6** 设  $K$  为形式背景,则  $\text{Card}(K) = \dim(K) = \text{fdim}_2(K^c)$ 。

**证明** 由公式 (4) 知,  $\dim(K)$  等于使得  $I = \cup_{i \in T} F_i$  成立的 1 阶 Ferrers 关系  $F_i$  的最小个数,即使得  $I = \cup_{i \in T} X_i \times Y_i$  成立的概念  $(X_i, Y_i)$  的最小个数。而  $\text{Card}(K)$  等于势最小的概念约简中概念的个数,故  $\text{Card}(K) = \dim(K)$ 。又由公式 (4) 知  $\text{Card}(K) = \text{fdim}_2(K^c)$ 。因此  $\text{Card}(K) = \dim(K) = \text{fdim}_2(K^c)$ 。

定理 6 表明形式背景  $K$  的基数等于其集合维数,同时也等于其补背景的 2 - 维数。

**推论 5** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景,则对于任意的  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(K)$ ,  $K$  在  $\mathcal{F}$  上都有集合表示,且  $\mathcal{F}$  的最小势为  $\text{Card}(K)$ , 其中,集合表示为

$$\begin{aligned} \alpha: G \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}), \alpha g &= \{(X_i, Y_i) \in \mathcal{F} \mid g \in X_i\}, \\ \beta: M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}), \beta m &= \{(X_j, Y_j) \in \mathcal{F} \mid \\ & m \in Y_j\}. \end{aligned}$$

**证明** 首先,设  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(K)$ , 由公式 (3) 和定理 6 知  $\text{Card}(K) = \dim_2 L(K^c)$ , 则  $\dim_2 L(K^c) \leq |\mathcal{F}|$ 。从而由引理 3 知,  $K^c$  在  $\mathcal{F}$  上有补集表示,即  $K$  在  $\mathcal{F}$  上有集合表示。进一步,由定理 6 知  $\mathcal{F}$  的最小势为  $\text{Card}(K)$ 。

其次,证明对于任意的  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(K)$ ,  $\alpha, \beta$  是  $K$  在  $\mathcal{F}$  上的集合表示,即证明  $gIm \Leftrightarrow \alpha g \cap \beta m \neq \emptyset$ 。一方面,若  $\alpha g \cap \beta m \neq \emptyset$ , 则存在  $(X_0, Y_0) \in \mathcal{F}$  使得  $(X_0, Y_0) \in \alpha g \cap \beta m$ , 即  $(X_0, Y_0) \in \alpha g$  且  $(X_0, Y_0) \in \beta m$ , 从而  $g \in X_0$  且  $m \in Y_0$ , 故  $(g, m) \in I$ 。另一方面,假设  $\alpha g \cap \beta m = \emptyset$ , 则对于  $\mathcal{F}$  中任意的  $(X, Y) \in \alpha g$  都有  $(X, Y) \notin \beta m$ 。因此,对于任意满足  $g \in X$  的  $(X, Y)$ , 都有  $m \notin Y$ , 则可得  $(g, m) \notin I$ , 与  $gIm$  矛盾。故  $\alpha, \beta$  是  $K$  在  $\mathcal{F}$  上的集合表示。

推论 5 表明一个形式背景在其任意概念约简上都有集合表示,且该集合表示的最小势为该形式背景的基数。

**例 8** (续例 6) 已知  $\text{Card}(K_3) = 4$  且  $\text{fdim}_2(K_3^c) = 4$ , 由此可解释定理 6。

取  $K_3$  的一个概念约简  $\mathcal{F} = \{e_2, e_6, e_7, e_8\}$ , 则由推论 5 可知,  $K_3$  在  $\mathcal{F}$  上有集合表示  $\alpha, \beta$ , 且  $\mathcal{F}$  的最小势为 4。映射  $\alpha: G_3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F})$  为  $1 \rightarrow \{e_7\}, 2 \rightarrow \{e_8\}, 3 \rightarrow \{e_2, e_6\}, 4 \rightarrow \{e_2\}$ ; 映射  $\beta: M_3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F})$  为  $a \rightarrow \{e_7, e_8\}, b \rightarrow \{e_6, e_7, e_8\}, c \rightarrow \{e_7\}, d \rightarrow \{e_6, e_7\}, e \rightarrow \{e_8\}, f \rightarrow \{e_2, e_6\}$ 。

下面用 Ferrers 维数刻画形式背景基数的范围。

**定理 7** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景, 则  $\text{fdim}(K^c) \leq \text{Card}(K) \leq \min(|G|, |M|)$ 。

**证明** 由性质 1 知  $\text{Card}(K) \leq \min(|G|, |M|)$ 。现证明  $\text{fdim}(K^c) \leq \text{Card}(K)$ 。由定理 6 知,  $\text{Card}(K)$  等于使得  $I = \cup_{i \in T} X_i \times Y_i$  成立的概念  $(X_i, Y_i)$  的最小个数, 即能覆盖  $I$  的极大矩形块的最小个数。 $\text{fdim}(K^c)$  等于使得  $I = \cup_{i \in T} F_i$  成立的 Ferrers 关系  $F_i$  的最小个数, 也即做并为  $I$  的阶梯形关系的最小个数。然而, 一个极大矩形块必然对应一个阶梯形关系, 但反过来不一定成立, 即一个阶梯形关系可能对应多个极大矩形块。故  $\text{fdim}(K^c) \leq \text{Card}(K)$ 。

综上, 有  $\text{fdim}(K^c) \leq \text{Card}(K) \leq \min(|G|, |M|)$ 。

定理 7 表明形式背景  $K = (G, M, I)$  的基数介于其补背景的 Ferrers 维数和  $\min(|G|, |M|)$  之间。

**例 9** (续例 6) 对于表 3, 有  $\min(|G_3|, |M_3|) = 4, \text{Card}(K_3) = 4$  且  $\text{fdim}(K_3^c) = 3$ , 显然有  $3 \leq \text{Card}(K_3) \leq 4$ 。

由定理 4、定理 5 和定理 7 可得如下结论。

**推论 6** 设  $K = (G, M, I)$  为形式背景, 若  $\text{fdim}(K^c) = |G| \leq |M|$ , 则  $O(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ ; 若  $\text{fdim}(K^c) = |M| \leq |G|$ , 则  $A(L(K)) \in \mathcal{B}(K)$ 。

## 5 结语

概念约简从概念的角度出发, 用极小的概念集保留形式背景的全部原始信息。一个形式背景的不同概念约简中概念的个数可能不同, 本文对概念个数最少的概念约简进行研究。在定义形式背景的基、基数、最膨胀概念约简和最压缩概念约简的基础上, 讨论它们之间的关系与性质。进而, 利用形式背景的基数给出了对象概念集 (属性概念集) 是基的等价刻画, 并阐明一个事实: 即使对

象概念集、属性概念集是概念约简,它们也不一定是形式背景的基。最后,证明了形式背景的基数等于其集合维数,并介于其补背景的 Ferrers 维数与对象集的势和属性集的势的较小值之间。

形式背景的基在确保形式背景的全部原始信息的前提下可极大地简化知识表示方式,本文的研究是有关形式背景的基的基础研究,这方面还有很多新问题亟待解决。比如,是否可以不通过获取所有概念约简再进行判断的方式而直接获取形式背景的基、关于最膨胀概念约简与最压缩概念约简的实际应用场景的探索及其价值等。这些问题的解决将有助于概念约简理论的完善和应用,也是未来我们进一步研究的方向。

## 参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C]// Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Springer, 1982: 445-470.
- [2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999: 18-19, 236-241.
- [3] CARPINETO C, ROMANO G. Exploiting the potential of concept lattices for information retrieval with CERDO [J]. Journal of Universal Computer Science, 2004, 10(8): 985-1013.
- [4] WILLE R. Why can concept lattices support knowledge discovery in databases? [J]. Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence, 2002, 14(2): 81-92.
- [5] KUZNETSOV S O. Machine learning on the basis of formal concept analysis [J]. Automation and Remote Control, 2001, 62(10): 1543-1564.
- [6] KHCHERIF R, GAMMOUDI M M, JAOUA A. Using difunctional relations in information organization [J]. Information Sciences, 2000, 125: 153-166.
- [7] ELLOUMI S, FERJANI F, JAOUA A. Using minimal generators for composite isolated point extraction and conceptual binary relation coverage: Application for extracting relevant textual features [J]. Information Sciences, 2016, 336: 129-144.
- [8] MOUAKHER A, BEN YAHIA S. QualityCover: Efficient binary relation coverage guided by induced knowledge quality [J]. Information Sciences, 2016, 355: 58-73.
- [9] ELLOUMI S. A new approach for textual feature selection based on N-composite isolated labels [J]. Natural Language Engineering, 2020, 26(2): 221-243.
- [10] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005, 35(6): 628-639.
- [11] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38(2): 195-208.
- [12] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.
- [13] WANG X, ZHANG W X. Knowledge reduction in concept lattices based on irreducible elements [C]// Lecture Notes in Computer Science (Transactions on Computational Science V: Special Issue on Cognitive Knowledge Representation). Berlin, Heidelberg: Springer, 2009, 5540: 128-142.
- [14] LI T J, LI M Z, GAO Y. Attribute reduction of concept lattice based on irreducible elements [J]. International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(6): 2792-2813.
- [15] CORNEJO M E, MEDINA J, RAMIREZ-POUSSA E. Attribute reduction in multi-adjoint concept lattices [J]. Information Sciences, 2015, 294: 41-56.
- [16] SHAO M W and LI K W. Attribute reduction in generalized one-sided formal contexts [J]. Information Sciences, 2017, 378: 317-327.
- [17] REN R S, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102.
- [18] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. On boolean factor analysis with formal concept as factors [J]. In SCIS and ISIS, 2006: 1054-1059.
- [19] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. Discovery of optimal factors in binary data via a novel method of matrix decomposition [J]. Journal of Computer and System Sciences, 2010, 76(1): 3-20.
- [20] KEPRT A, SNASEL V. Binary factor analysis with help of formal concepts [C]// Proceedings of International Workshop on Concept Lattices and Their Applications. Ostrava: CEUR-WS. Org, 2004, 110: 90-

101.

[21] 魏玲, 曹丽, 祁建军, 等. 形式概念分析中的概念约简与概念特征[J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(12): 1817-1833.

WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis[J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12): 1817-1833.

[22] 曹丽, 魏玲, 祁建军. 保持二元关系不变的概念约简[J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(6): 516-524.

CAO L, WEI L, QI J J. Concept reduction preserving binary relations [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 516-524.

[23] 谢小贤, 李进金, 陈东晓, 等. 基于布尔矩阵的保持二元关系不变的概念约简[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(5): 32-45.

XIE X X, LI J J, CHEN D X, et al. Concept reduction of preserving binary relations based on boolean matrix [J]. Journal of Shandong University (Natural Science Edition), 2020, 55(5): 32-45.

[24] 王霞, 彭致华, 李俊余, 等. 一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法[J]. 计算机科学, 2021, 48(1): 125-130.

WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of concept reduction based on concept discernibility matrix [J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.

[25] 马文胜, 侯锡林. 形式概念分析中的同效关系与概念约简[J]. 计算机科学, 2023, 50(4): 63-76.

MA W S, HOU X L. Same effect relation and concept reduction in formal concept analysis [J]. Computer Science, 2023, 50(4): 63-76.

[26] ZHAO S Y, QI J J, LI J A, et al. Concept reduction in formal concept analysis based on representative concept matrix [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2023, 14(4): 1147-1160.

[27] 魏玲, 赵思雨, 祁建军. 对称形式背景及其概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 794-802.

WEI L, ZHAO S Y, QI J J. Symmetric formal context and its concept reduct [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 794-802.

[28] 朱朵朵, 任睿思, 赵思雨, 等. 基于不完备背景的3类 SE-ISI 概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 821-829.

ZHU D D, REN R S, ZHAO S Y, et al. Three types of SE-ISI concept reduction based on incomplete contexts [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 821-829.

[29] 李炎, 赵思雨, 任睿思, 等. 保持规则前件信息概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 803-811.

LI Y, ZHAO S Y, REN R S, et al. Concept reduction preserving antecedent information of rules [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5): 803-811.

[30] JÄKEL C, SCHMIDT S E. Packing problems, dimensions and the tensor product of complete lattices [C]// Proceedings of International Conference on Conceptual Structures. Bolzano, Italy: Springer, 2021: 142-151.

(编辑 张 欢)